شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان لزج تراکم‌پذیر گذر از صوت و مافوق صوت با استفاده از طرح حفظ مقدار انرژی جنبشی *

صالح عباسی مود[۱] سید مجید ملک‌جعفریان[۲]

چکیده *مقالهٔ حاضر به بررسی حل عددی معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر در حالت ناپایا و دوبعدی بـر پایـهٔ روش حجـم محـدود بـا طرحی جدید می‌پردازد. لذا طرح حفظ مقدار انرژی جنبشی (Kinetic Energy Preserving (KEP)) برای حل میدان جریان تراکم‌پذیر گذر از صوت و مافوق صوت خارجی روی شبکه‌های خیلی ریز (تعداد مش از مرتبهٔ عدد رینولدز) بدون نیاز به جملات اتلاف مصنوعی، حتی در محل وقوع امواج ضربه‌ای معرفی می‌گردد. لازم به ذکر است که حل میدان جریان با طرح مورد نظر در این محدوده از سرعت، برای اولین بار ارائه می‌شود. لذا با انفصال معادلات حاکم براساس طرح KEP و حذف اثرات اتلافـی، شـبیه‌سـازی عـددی مسـتقیم (Direct Numerical Simulation) جریان امکان‌پذیر می‌گردد. نتایج به‌دست آمده از این حل، برای جریان مافوق صوت روی صفحهٔ تخت و جریان گذر از صوت روی ایرفویل در اعداد رینولدز پایین نشان می‌دهد که روش KEP قادر است بدون هیچ اتلاف مصنوعی حتی در نواحی بـا امـواج ضـربه‌ای، حلی پایدار و غیرنوسانی ارائه دهد. بنابراین می‌توان از روش KEP به‌منظور شبیه‌سازی عددی مسـتقیم جریـان‌هـای آشـفته (بـدون نیـاز بـه هیچ‌گونه مدل‌سازی پدیدهٔ آشفتگی) بهره برد.*

واژه‌های کلیدی جریان لزج تراکم‌پذیر; روش حجم محدود; شبیه‌سازی عددی مستقیم; حفظ مقدار انرژی جنبشی.

Direct Numerical Simulation of Supersonic and Transonic Compressible Viscous Flow by Kinetic Energy Preserving Scheme

S. Abbasi-Mood S.M. Malek-Jafarian

Abstract *Present paper investigates the numerical solution of two-dimensional unsteady compressible Navier-Stokes equations by a new scheme based on the finite volume method. Kinetic Energy Preserving (KEP) scheme is introduced for solving the supersonic and Transonic external compressible flow field on very fine grids (with a number of cells of the order of the Reynolds number) without artificial dissipation terms even in place of shock waves. It should be noted that the solution of flow field with this scheme in this range of speed, is presented for the first time. By discretization of the governing equations based on KEP scheme and elimination of dissipative effects, the Direct Numerical Simulation (DNS) of the flow is possible. The results of this solution for supersonic flow over flat plate and Transonic flow over the airfoil at low Reynolds numbers show that the KEP method can be presented stable and non-oscillatory solution by no artificial dissipation even in areas with shock waves. Therefore, the KEP method can be used for DNS of turbulent flows (without a modeling the turbulence phenomena itself).*

Key Words Compressible Viscous Flow; Finite Volume Method; Direct Numerical Simulation; Kinetic Energy Preserving Scheme

★تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۱۰/۲۱ و تاریخ پذیرش آن ۹٤/۱/۱۵ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v28i1.30888

(۱) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند. mmjafarian@birjand.ac.ir

مقدمه

امروزه در اکثر صنایع نیاز به حل عددی معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر امری عادی محسوب می‌شود؛ اما به علت ماهیت سهموی (Parabolic) و غیرخطی این معادلات، حل آنها در صورت وجود امواج ضربه‌ای یا ناپیوستگی‌های محل تماس می‌تواند گسسته باشد. حل مسائلی با این نقاط ناپیوستگی ممکن است یکتا (Unique) نباشد یا حلی ضعیف باشد [1]. از طرفی برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر لازم است که شرط بقای جرم، مومنتوم و انرژی ارضا شوند. در برخورد با جریان‌های تراکم‌پذیر همراه با امواج ضربه‌ای، اهمیت انفصال معادلات در شکل بقایی آن بیشتر می‌شود؛ به‌طوری که بر طبق نظریهٔ لکس (Lax) و وندورف (Wendroff) برای تضمین این‌که حل عددی شرایط درست وقوع موج ضربه‌ای (Shock Jump Conditions) را پیش‌بینی کند، کافی است که معادلات در شکل بقایی‌شان منفصل گردند. البته به شرطی که حل عددی در حالت حدی با ریزتر شدن شبکه، همگرا شود [2].

یکی از راهبردهای دینامیک سیالات محاسباتی برای تسخیر امواج ضربه‌ای یا تسهیل در پایداری جریان‌های تراکم‌پذیر، اضافه کردن جملات اتلاف مصنوعی (Artificial Dissipation Term) به معادلات حاکم است؛ اما اگر اضافه کردن لزجت مصنوعی، به‌طور کامل کنترل نشود و دقیقاً به جایی که نیاز است محدود نگردد، می‌تواند باعث میرایی (Dampening) در کل دامنهٔ محاسباتی شود. در این صورت بعضی ویژگی‌های جریان از قبیل گردابه‌های جریان آشفته، می‌تواند به واسطهٔ شبیه‌سازی، کاملاً حذف گردد [3]. لذا طرحی که کمترین میزان اتلاف مصنوعی را به معادلات اضافه کند، از نظر برقراری قوانین بقا، قابل اعتمادتر است و می‌تواند نتایج بهتری ارائه دهد.

برخی از محققان بر این نظرند که اگر یک طرح انفصالی طوری ساخته شود که بتواند برآورد درستی از یک نوع انرژی کل را ارائه دهد، آن‌گاه حداقل باید برای حل‌های هموار (Smooth) بدون نیاز به لزجت مصنوعی پایدار باشد [2]. بنابراین می‌توان از طرحی استفاده کرد که در عین این‌که کمترین میزان اتلاف مصنوعی را (چه در حوالی امواج ضربه‌ای و چه در نواحی هموار میدان جریان) به معادلات اضافه می‌کند، برآورد درستی از حفظ مقدار انرژی جنبشی داشته باشد. انرژی جنبشی کمیتی مهم در جریان‌های سیال است که به‌وسیلهٔ لزجت فیزیکی از بین می‌رود. در جریان آشفته، انرژی جنبشی تزریق شده به سیال در مقیاس‌های بزرگ به‌صورت آبشاری به مقیاس‌های کوچک منتقل و سرانجام به‌وسیلهٔ لزجت نابود می‌شود. از این‌رو برای یک طرح عددی مطلوب است که حفظ مقدار انرژی جنبشی سازگار با معادلات ناویر-استوکس را به‌طور مطمئن ارائه دهد [1]. هر چند اعمال محدودیت (Bound) روی انرژی جنبشی، محدودیتی را در حل یک جریان تراکم‌پذیر تضمین نمی‌کند؛ اما در جایی که آبشار انرژی بین مقیاس‌های مختلف گردابه‌ها وجود دارد، ارزیابی صحیح حفظ انرژی جنبشی برای دقت شبیه‌سازی آشفتگی، لازم و تعیین‌کننده است [2].

در روش حجم محدود، شارهای لزج و غیرلزج در امتداد وجه هر سلول از شبکه باید محاسبه شود. در محاسبهٔ این شارها می‌توان برخی خواص معادلات ناویر-استوکس از جمله حفظ مقدار انرژی جنبشی را در نظر گرفت. بر این اساس جیمسون (Jameson) طرح حجم محدودی ارائه کرده است که دقیقاً قانون حفظ مقدار کلی انرژی جنبشی را ارضا می‌کند [2]. طرح حفظ مقدار انرژی جنبشی جیمسون (KEP) نشان می‌دهد که شارهای فصل مشترک یک طرح بقایی نیمه-منفصل (Semi-Discrete) می‌تواند طوری ساخته شود که معادلهٔ انفصالی انرژی جنبشی کل حاصل از این روش، دقیقاً متناظر با معادلهٔ انرژی جنبشی کل

باشد. ویژگی اصلی این شارها در طرح KEP برای تسخیر حفظ مقدار انرژی جنبشی، در نحوهٔ محاسبهٔ شار مومنتوم نهفته است. این نحوهٔ محاسبه در طرح KEP موجب می‌شود تا جملات شار جابه‌جایی از معادلهٔ انرژی جنبشی حذف شود. در واقع طرح KEP برای ارزیابی شارهای لزج (تنش‌ها) و شارهای غیرلزج (جابه‌جایی) در فصل مشترک سلول‌ها از میانگین حسابی مقادیر هرکمیت در مرکز هر جفت سلول مجاور استفاده می‌کند. از طرفی طرح KEP، حفظ مقدار کلی انرژی جنبشی را در سرتاسر دامنهٔ محاسباتی علاوه بر بقای جرم، مومنتوم و انرژی کل حفظ می‌کند. رعایت حفظ مقدار انرژی جنبشی در جریان‌های هموار و هم‌چنین جریان‌هایی که دارای ناپیوستگی (امواج ضربه‌ای) هستند، به اندازهٔ کافی پایداری برای انجام محاسبات فراهم می‌کند.

در تجربیات عددی طرح KEP توانسته است که امواج ضربه‌ای، ناپیوستگی محل تماس و ناحیهٔ انبساط را با موفقیت بدون اضافه کردن هیچ نوع اتلاف مصنوعی حل کند؛ به شرطی که از شبکه‌ای به اندازهٔ کافی ریز با تعداد نقاطی از مرتبهٔ عدد رینولدز استفاده شود [2]. این طرح، اولین بار برای شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان تراکم‌پذیر لزج یک‌بعدی در یک لولهٔ دارای امواج ضربه‌ای به‌کار برده شد [2]. در ادامه آلانیو (Allaneau) و جیمسون [3] از این طرح برای شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان تراکم‌پذیر لزج دوبعدی در یک لولهٔ دارای امواج ضربه‌ای استفاده کردند. آلانیو و جیمسون [4] طرح KEP را برای شبیه‌سازی عددی مستقیم دوبعدی جریان تراکم‌پذیر زیر صوت لزج با عدد رینولدز پایین روی ایرفویل نوسانی به‌کار بردند. طرح KEP مجدداً توسط آلانیو و جیمسون [5] به روش گالرکین ناپیوسته با مراتب بالاتر تعمیم یافت و برای تحلیل یک‌بعدی در یک لولهٔ دارای امواج ضربه‌ای استفاده شد.

در پژوهش حاضر برای اولین بار به‌منظور حل عددی مستقیم جریان تراکم‌پذیر گذر از صوت و مافوق صوت خارجی روی شبکه‌های خیلی ریز بدون نیاز به جملات اتلاف مصنوعی (حتی در محل وقوع امواج ضربه‌ای) از طرح KEP استفاده شده است. بدین منظور ابتدا شارهای لزج و غیرلزج معادلات ناویر-استوکس ناپایای تراکم‌پذیر در امتداد وجه هر سلول از شبکه مطابق با طرح KEP محاسبه می‌شود. در مورد پیشروی زمانی حل، از روش سه مرحله‌ای شو (Shu) با کوچک‌ترین گام زمانی سلول‌های شبکه که مرتبط با عدد کورانت (CFL) است، استفاده خواهد شد. سپس نتایج تحلیل دوبعدی جریان مافوق صوت روی صفحهٔ تخت و جریان گذر از صوت روی ایرفویل در اعداد رینولدز پایین ارائه می‌گردد.

طرح حفظ مقدار انرژی جنبشی در حالت کلی

در این قسمت طرح KEP برای جریان لزج تراکم‌پذیر سه‌بعدی بسط خواهد یافت. میدان سرعت به‌صورت u^i فرض می‌شود که از بالانویس i برای نشان دادن جهت مختصات استفاده می‌گردد. بنابراین معادلات ناویر-استوکس در شکل بقایی و نوشتار ماتریسی می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}F^i(W)=0 \qquad (۱)$$

که در آن بردارهای حالت و شار برابرند با:

$$W=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u^1\\ \rho u^2\\ \rho u^3\\ \rho E\end{bmatrix},\ F^i=\begin{bmatrix}\rho u^i\\ \rho u^i u^1-\tau^{i1}+p\delta^{i1}\\ \rho u^i u^2-\tau^{i2}+p\delta^{i2}\\ \rho u^i u^3-\tau^{i3}+p\delta^{i3}\\ \rho u^i H-u^j\tau^{ij}-q^j\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

در این رابطه ρ چگالی، p فشار و $E=e+\frac{1}{2}{u^i}^2$ انرژی کل مخصوص (بر واحد جرم) است که مجموع

انرژی درونی e و جنبشی $\frac{1}{2}u^{i^2}$ می‌باشد. هم‌چنین H مجموع انرژی کل مخصوص و E کار جریان $\frac{p}{\rho}$ است که انتالپی مخصوص نام دارد. تانسور تنش‌های لزج τ^{ij} و شارهای حرارتی q^j نیز به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\tau^{ij} = \mu\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u^k}{\partial x^k}\delta^{ij} \qquad (۳)$$

$$q^j = -k\frac{\partial T}{\partial x^j} \qquad (٤)$$

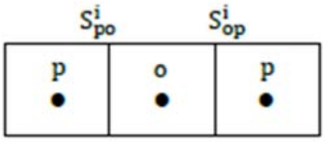
که در آن δ^{ij} دلتای کرونکر، T درجهٔ حرارت، μ لزجت مولکولی و k هدایت حرارتی است. اگر انرژی جنبشی بر واحد حجم به‌صورت $K = \rho\, u^{i^2}/2$ تعریف شود؛ با مشتق‌گیری از K نسبت به زمان t، معادلهٔ (۵) استخراج می‌شود:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^{i^2}}{2}\right) = u^i\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) - \frac{u^{i^2}}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (۵)$$

با جایگزینی مشتق‌های زمانی نظیر، از معادلات پیوستگی و مومنتوم در رابطهٔ (۵) و انتگرال‌گیری از آن روی یک میدان ثابت قرضی (D) در فضا، قانون حفظ مقدار کلی برای انرژی جنبشی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D K dV = -\int_{\partial D}\left[u^j\left(p + \rho\frac{u^{i^2}}{2}\right) - u^i\tau^{ij}\right]\vec{n}^j dA + \int_D\left(p\frac{\partial u^j}{\partial x^j} - \tau^{ij}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)dV \qquad (٦)$$

که در آن $\vec{n}^j$ بردار عمود بر سطح، dA المان سطح، dV المان حجم سلول و ∂D کل سطح مرزی است. در اینجا فرض می‌شود که میدان D شامل هیچ نوع ناپیوستگی نمی‌باشد. اگر امواج ضربه‌ای در این میدان وجود داشته باشد؛ رابطهٔ (٦) دیگر برقرار نیست. بنا به تعریف، یک طرح عددی برای حل معادلات ناویر-استوکس لزج، زمانی مقدار انرژی جنبشی را حفظ می‌کند که فرم انفصالی رابطهٔ (٦) را ارضا کند [3].



شکل ۱ نمایی از حجم کنترل یا گره **o** با گره‌های مجاور **p**

حال اگر فرض شود که میدان جریان با یک شبکه‌ی دلخواه از سلول‌ها پوشیده شده است، معادلات بقای (۱) می‌توانند با دیدگاه حجم محدود منفصل شوند. لذا مطابق با شکل (۱)، حجم کنترل‌هایی به‌صورت سلول در نظر گرفته می‌شود که گره‌ها در مرکز آنها واقع شده است. در این صورت هر حجم کنترل یا سلول o یک یا چند سلول همسایه p دارد که با وجه‌هایی محدود می‌شود. مساحت این وجه‌های جهت‌دار با S^i_{op} که وجه مشترک حجم کنترل‌های o و p است، نشان داده می‌شود. هر حجم کنترل یا گره مرزی b نیز به‌وسیلهٔ یک وجه خارجی با مساحت جهت‌دار S^i_b بسته می‌شود؛ در این‌جا S^i_b از منفی مجموع مساحت وجه‌های بین b و دیگر همسایه‌هایش به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$\begin{aligned} n^i_{op} &= -n^i_{po} \\ S^i_{op} &= A_{op} n^i_{op} \\ S^i_b &= -\sum_p S^i_{bp} \end{aligned} \qquad (۷)$$

در رابطهٔ (۷) n^i_{op} بردار عمود بر سطح و A_{op} مساحت اسکالر وجه op می‌باشد. تقریب حجم محدود نیمه-منفصل معادلات بقای (۱) برای هر گره داخلی o به شکل زیر است:

$$\mathrm{Vol_o}\frac{dW_o}{dt}+\sum_p F^i_{op}\,S^i_{op}=0 \qquad (۸)$$

در معادلهٔ (۸) Vol_o حجم سلول o است. بردارهای حالت و شار نیز برابرند با:

$$W_o=\begin{bmatrix}\rho_o\\ \rho_o u^1_o\\ \rho_o u^2_o\\ \rho_o u^3_o\\ \rho_o E_o\end{bmatrix},\quad F^i_{op}=\begin{bmatrix}(\rho u^i)_{op}\\ (\rho u^i u^1)_{op}+(p\delta^{i1}-\tau^{i1})_{op}\\ (\rho u^i u^2)_{op}+(p\delta^{i2}-\tau^{i2})_{op}\\ (\rho u^i u^3)_{op}+(p\delta^{i3}-\tau^{i3})_{op}\\ (\rho u^i H)_{op}+(u^j\tau^{ij}+q^j)_{op}\end{bmatrix} \qquad (۹)$$

در گره مرزی b باید سهم اضافهٔ $F^i_b\,S^i_b$ نیز در نظر گرفته شود که در این‌جا بردار شار مرزی F^i_b به‌صورت زیر ارزیابی می‌شود:

$$F^i_b=F^i(W_b) \qquad (۱۰)$$

حال می‌توان با تعیین شرایط کافی برای المان F^i_{op} مقدار انرژی جنبشی را حفظ کرد و شکل انفصالی رابطهٔ (٦) را به‌دست آورد؛ این شرایط، اساس طرح حفظ مقدار انرژی جنبشی (KEP) را ارائه می‌دهد [2]. بنابراین اگر به‌ترتیب شارهای جابه‌جایی (غیرلزج) و شارهای لزج وجه‌های داخلی که در المان F^i_{op} رابطهٔ (۹) وجود دارد، به شکل زیر محاسبه شود:

$$(\rho u^i u^j)_{op}=\frac{1}{2}(\rho u^i)_{op}(u^j_p+u^j_o) \qquad (۱۱)$$

$$(p\delta^{ij}-\tau^{ij})_{op}=\frac{1}{2}(p\delta^{ij}-\tau^{ij})_o+\frac{1}{2}(p\delta^{ij}-\tau^{ij})_p \qquad (۱۲)$$

و هم‌چنین اگر شارهای مذکور در مرزهای میدان به‌صورت زیر محاسبه گردند:

$$\begin{aligned}(\rho u^i)_b&=\rho_b u^i_b\\ (\rho u^i u^j)_b&=\rho_b u^i_b u^j_b\\ (p\delta^{ij}-\tau^{ij})_b&=p_b\delta^{ij}-\tau^{ij}_b\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

آن‌گاه تقریب (۸)، شکل انفصالی قانون حفظ مقدار کلی انرژی جنبشی (٦) را به‌صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\sum_o \mathrm{vol_o}\frac{dK_o}{dt}=&\\ -\sum_b S^j_b&\left(u^j_b\left(p_b+\rho_b\frac{u^{i^2}_b}{2}\right)-u^i_b\tau^{ij}_b\right)\\ +\sum_o p_o&\sum_p\frac{u^i_o+u^i_p}{2}S^i_{op}\\ -\sum_o \tau^{ij}_o&\sum_p\frac{u^i_o+u^i_p}{2}S^i_{op}\end{aligned} \qquad (۱٤)$$

باید توجه داشت که در روابط فوق زیرنویس‌های o و p نشان‌دهندهٔ محل گره داخلی، b نشانگر محل گره مرزی و op محل وجه داخلی است. لذا در شرایط (۱۱ و ۱۲) طرح KEP، ابتدا مجهولات سرعت، فشار و تنش در محل گره محاسبه شده سپس با گرفتن یک میانگین حسابی به محل وجه منتقل می‌شود؛ اما در مورد شرایط (۱۳) به‌دلیل قرار گرفتن گره بر روی وجه مرزی نیازی به گرفتن میانگین حسابی نیست و درنتیجه به‌طور مستقیم مقدار گره مرزی برای محاسبهٔ شار لحاظ می‌گردد.

نحوهٔ محاسبهٔ شار جابه‌جایی در شرط (۱۱) کمی آزادی عمل به‌وجود می‌آورد؛ چرا که برای شار پیوستگی $(\rho u^i)_{op}$ شرط خاصی تعیین نشده است. بنابراین اگر میانگین حسابی یک کمیت مانند g بین

سلول‌های o و p به‌صورت $\bar{g}_{op} = (g_o + g_p)/2$ در نظر گرفته شود، شار پیوستگی برابر است با:

$$(\rho u^i)_{op} = \bar{\rho}_{op}\bar{u}^i_{op} \quad \text{or} \quad \overline{\rho u^i}_{op} \tag{۱۵}$$

سپس برای محاسبهٔ شار جابه‌جایی از شرط (۱۱) استفاده می‌شود. از این آزادی عمل در محاسبهٔ شار می‌توان برای ایجاد طرح‌هایی که خواصی غیر از مقدار انرژی جنبشی را حفظ می‌کنند، بهره برد. به‌طور مشابه با شرط (۱۱) می‌توان برای محاسبهٔ شار انرژی $(\rho u^i H)_{op}$ به شکل زیر عمل کرد:

$$(\rho u^i H)_{op} = (\rho u^i)_{op}\bar{H}_{op} \tag{۱۶}$$

در نهایت اگر شارهای داخلی رابطهٔ (۹)، شرایط (۱۱ و ۱۲) و شارهای مرزی آن شرایط (۱۳) را ارضا کنند، مقدار انرژی جنبشی حفظ شده و طرح موسوم به KEP به‌دست می‌آید.

تحلیل دوبعدی جریان لزج تراکم‌پذیر

معمولاً در تحلیل عددی معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر، جملات شار غیرلزج در محل وجه‌های شبکه با طرح تفاضل مرکزی منفصل شده و شارهای لزج نیز به‌کمک روابط تفاضل محدود به‌طور مستقیم در محل وجه محاسبه می‌شوند. اما به‌دلیل وجود امواج ضربه‌ای در جریان تراکم‌پذیر، حل‌های عددی مذکور نیازمند استفاده از طرح‌های اتلاف مصنوعی همانند طرح اتلافی اسکالر (Scalar Dissipation Scheme) برای پیش‌بینی بهتر نواحی با تغییرات شدید هستند؛ به‌طوری که این نوع حل‌ها بدون وجود یک طرح اتلافی، حتی در شبکه‌های ریز هم واگرا می‌شوند. اما در کار حاضر هدف آن است که براساس طرح KEP حلی عددی بر پایهٔ روش حجم محدود برای معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر ارائه شود تا علاوه بر همگرایی حل با دقت بیشتر، دیگر نیاز به اضافه کردن اتلاف مصنوعی نباشد.

طرح KEP برای حل میدان جریان تراکم‌پذیر در شبکه‌های خیلی ریز بدون نیاز به جملات اتلاف مصنوعی حتی در محل وقوع موج ضربه‌ای توسعه یافته است؛ به‌طوری که برای شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) مناسب می‌باشد. این طرح نحوهٔ محاسبهٔ شارهای لزج و غیرلزج را مطابق با آن‌چه شرح داده شد، تغییر می‌دهد. لذا در این پژوهش ابتدا معادلات دوبعدی حاکم بر جریان تراکم‌پذیر با تقریب حجم محدود منفصل می‌شوند؛ سپس با اعمال شرایط (۱۱) تا (۱۳) طرح KEP در محاسبهٔ شارهای عددی، ضمن حذف جملات اتلاف مصنوعی، یک کد عددی به‌دست می‌آید. در ادامه نیز از کد KEP برای اولین بار جهت تحلیل دوبعدی جریان لزج خارجی مافوق صوت روی صفحهٔ تخت و گذر از صوت روی ایرفویل در اعداد رینولدز پایین استفاده شده و اثرات حذف جملات اتلاف مصنوعی بررسی می‌گردد. لازم به توضیح است که در حل مستقیم جریان، با افزایش عدد رینولدز تعداد نقاط شبکه نیز افزایش می‌یابد. این امر علاوه بر افزایش محاسبات عددی، ملزومات سخت‌افزاری با سرعت بیشتر را نیز می‌طلبد. لذا به‌دلیل عدم پرهیز از محاسبات طولانی و عدم دسترسی به سخت افزارهای با سرعت بالا، در کار حاضر سعی شده است که محاسبات محدود به اعداد رینولدز پایین باشد.

معادلات حاکم. در فرآیندهای حل عددی بهتر است از شکل بی‌بعد معادلات حاکم، تعریف‌شده براساس کمیت‌های جریان آزاد استفاده شود. لذا معادلات بی‌بعد جریان لزج تراکم‌پذیر در دوبعد به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial W}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}F(W) + \frac{\partial}{\partial y^*}G(W) = \frac{1}{Re_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x^*}R(W) + \frac{\partial}{\partial y^*}S(W)\right) \tag{۱۷}$$

در معادلهٔ (۱۷) بردارهای حالت و شار عبارتند از:

$$W=\begin{bmatrix}\rho^*\\ \rho^*u^*\\ \rho^*v^*\\ \rho^*E^*\end{bmatrix},\quad F(W)=\begin{bmatrix}\rho^*u^*\\ \rho^*u^{*2}+p^*\\ \rho^*u^*v^*\\ (\rho^*E^*+p^*)u^*\end{bmatrix},\quad G(W)=\begin{bmatrix}\rho^*v^*\\ \rho^*v^*u^*\\ \rho^*v^{*2}+p^*\\ (\rho^*E^*+p^*)v^*\end{bmatrix},$$
$$R(W)=\begin{bmatrix}0\\ \tau^*_{xx}\\ \tau^*_{xy}\\ \tau^*_{xx}u^*+\tau^*_{yx}v^*+q^*_x\end{bmatrix},\quad S(W)=\begin{bmatrix}0\\ \tau^*_{yx}\\ \tau^*_{yy}\\ \tau^*_{yy}v^*+\tau^*_{xy}u^*+q^*_y\end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

لازم به ذکر است که x و y به‌ترتیب مؤلفه‌های افقی و عمودی دستگاه مختصات کارتزین، u و v نیز مؤلفه‌های سرعت متناظر با آنها محسوب می‌شود.

استخراج شارهای عددی براساس طرح KEP. با انفصال معادلهٔ بی‌بعد (۱۷) روی یک شبکهٔ دلخواه دوبعدی با گره‌های حجم کنترلی o، گره‌های مجاور p و محل وجوه op مطابق با تقریب (۸)، شارهای جابه‌جایی غیرلزج در محل هر وجه از طریق طرح KEP به‌صورت میانگین حسابی هر کمیت به‌طور جداگانه، محاسبه می‌گردند؛ به‌عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix}\rho^*u^*\\ \rho^*u^{*2}+p^*\\ \rho^*u^*v^*\\ (\rho^*E^*+p^*)u^*\end{bmatrix}_{op}=\begin{bmatrix}\bar{\rho}^*_{op}\,\bar{u}^*_{op}\\ \bar{\rho}^*_{op}\,{\bar{u}^*_{op}}^2+\bar{p}^*_{op}\\ \bar{\rho}^*_{op}\,\bar{u}^*_{op}\,\bar{v}^*_{op}\\ \bar{\rho}^*_{op}\,\bar{u}^*_{op}\,\bar{H}^*_{op}\end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

جملات شار معادلهٔ انرژی با توجه به این‌که $H^*=E^*+\frac{p^*}{\rho^*}$ محاسبه شده اند. براساس طرح KEP،

در مورد شارهای ناشی از تنش‌های لزج نیز می‌توان به‌طور مشابه عمل کرد؛ برای مثال:

$$\begin{bmatrix}0\\ \tau^*_{xx}\\ \tau^*_{xy}\\ \tau^*_{xx}u^*+\tau^*_{yx}v^*+q^*_x\end{bmatrix}_{op}=\begin{bmatrix}0\\ \bar{\tau}^*_{xx_{op}}\\ \bar{\tau}^*_{xy_{op}}\\ \bar{\tau}^*_{xx_{op}}\,\bar{u}^*_{op}+\bar{\tau}^*_{yx_{op}}\,\bar{u}^*_{op}+\bar{q}^*_{x_{op}}\end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

پیشروی زمانی. در طرح KEP برای پیشروی زمانی حل، روش سه مرحله‌ای شو پیشنهاد شده است [2]. اگر تقریب نیمه–منفصل (۸) در دوبعد با سطح سلولی A_o، به شکل زیر در نظر گرفته شود:

$$A_o\frac{\Delta W_o}{\Delta t}+F_{op}(W)=0 \tag{۲۱}$$

که در آن:

$$\Delta W_o={W_o}^{n+1}-{W_o}^{n},\quad F_{op}(W)=\sum_p F^i_{op}\,S^i_{op}$$

روش شو براساس تقریب نیمه–منفصل (۲۱) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}{W_o}^0&={W_o}^n\\ {W_o}^1&={W_o}^0-\alpha^1\frac{\Delta t}{A_o}F_{op}(W^0)\\ {W_o}^2&=\frac{3}{4}{W_o}^0+\frac{1}{4}{W_o}^1-\alpha^2\frac{\Delta t}{A_o}F_{op}(W^1)\\ {W_o}^3&=\frac{1}{3}{W_o}^0+\frac{2}{3}{W_o}^2-\alpha^3\frac{\Delta t}{A_o}F_{op}(W^2)\\ {W_o}^{n+1}&={W_o}^3\end{aligned} \tag{۲۲}$$

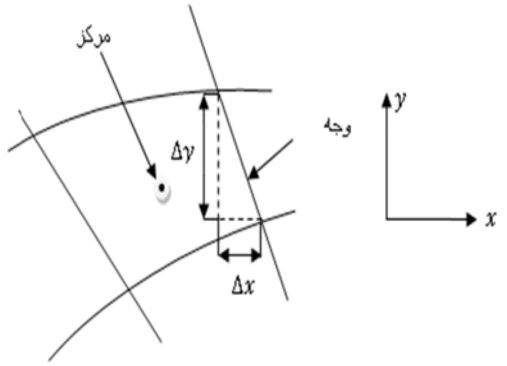
که ضرایب هر مرحله برابر است با:

$$\alpha^1=1\ ,\ \alpha^2=\frac{1}{4}\ ,\ \alpha^3=\frac{2}{3}$$

گام زمانی. حل عددی معادلات به روش KEP باید از دقت زمانی برخوردار باشد. بنابراین در این‌جا از کوچکترین گام زمانی سلول‌های شبکهٔ حل که مرتبط با عدد کورانت (CFL) است، استفاده می‌شود. لذا ابتدا گام زمانی مجاز برای هر سلول شبکهٔ حل محاسبه می‌گردد، سپس کوچکترین آن برای تمام حوزهٔ حل انتخاب می‌شود. برای یک سلول دلخواه همانند شکل (۲) گام زمانی مجاز Δt به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta t = \frac{A_o \times CFL}{\hat{\lambda}_x + \hat{\lambda}_y} \qquad (۲۳)$$

که در آن $\hat{\lambda}_x$ و $\hat{\lambda}_y$ به‌ترتیب میانگین شعاع ضمنی ماتریس‌های ژاکوبین شار در جهات x و y هستند [6].



شکل ۲ یک سلول دلخواه در یک شبکهٔ دوبعدی

ارائه و بررسی نتایج

در این بخش، نتایج به‌دست آمده از حل عددی مستقیم معادلات دوبعدی جریان تراکم‌پذیر لزج روی صفحهٔ تخت و ایرفویل براساس طرح KEP ارائه می‌شود. سپس به بررسی این طرح با محوریت نیاز یا عدم نیاز آن به جملات اتلاف مصنوعی برای پایداری حل و تسخیر موج ضربه‌ای پرداخته خواهد شد. جیمسون در مورد طرح KEP ادعا کرده است که [2]:

«در آزمون‌های عددی طرح KEP توانسته است امواج ضربه‌ای، ناپیوستگی‌های محل تماس و نواحی انبساط ناگهانی را بدون اضافه نمودن هیچ نوع جملهٔ اتلاف مصنوعی با موفقیت حل کند؛ به شرطی که از شبکه‌ای به اندازهٔ کافی ریز با تعداد نقاطی از مرتبهٔ عدد رینولدز جریان استفاده شود.»

در ادامه سعی می‌شود تا ادعای مذکور با انجام آزمون‌هایی مورد بررسی قرار گیرد. سیال مورد نظر در این پژوهش، هوا می‌باشد که مشخصات آن در دمای ۲۸۸/۱٦ کلوین در جدول (۱) آمده است.

جدول ۱ خواص سیال هوا در دمای ۲۸۸/۱٦ کلوین

ρ_∞ $(\frac{kg}{m^3})$	$\mu_\infty \times 10^5$ $\left(\frac{kg}{m.s}\right)$	c_{p_∞} $(\frac{J}{kg.K})$	$\gamma = \frac{c_{p_\infty}}{c_{v_\infty}}$	Pr_∞	c_∞ $(\frac{m}{s})$
۱/۲۲۵	۱/۷۸۵	۱۰۰٦	۱/٤	۰/۷۲	۳٤۰/۲۷

جدول ۲ مشخصات جریان آزاد روی صفحهٔ تخت

T_∞ (K)	$Ma_\infty = \frac{U_\infty}{c_\infty}$	$Re_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}$
۲۸۸/۱٦	٤	۱۰۰۰

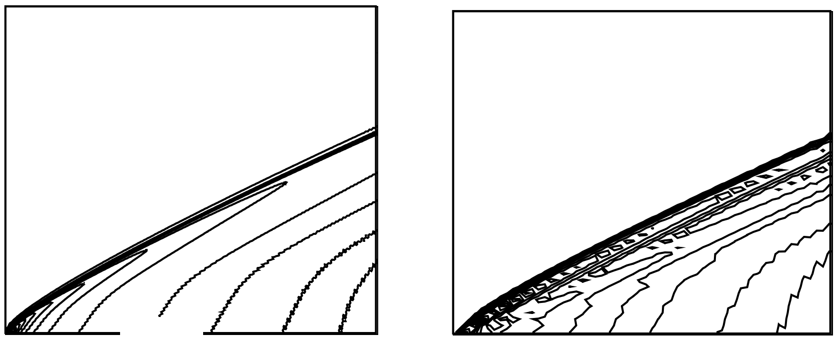
آزمون اول: صفحهٔ تخت. در این مرحله، جریان تراکم‌پذیر مافوق صوت آرام (عدد ماخ بالا و عدد رینولدز پایین) روی یک صفحهٔ تخت با شرط مرزی آدیاباتیک (عایق) در نظر گرفته می‌شود. مشخصات این جریان در جدول (۲) آمده است؛ این شرایط مطابق با مرجع [7] می‌باشد (به‌منظور مقایسه). لازم به ذکر است که روش عددی به‌کار رفته در مرجع [7]، روش صریح مک–کورمک می‌باشد.

دامنهٔ حل جریان، یک مستطیل با طول و عرض بی‌بعد ۱ و ۰/۸ با شبکه‌ای کاملاً یکنواخت اختیار شده است. شرایط مرزی بدین صورت است که در مرزهای ورودی و بالایی، برای تمام متغیرهای جریان شرایط جریان آزاد اعمال می‌گردد و در مرز خروجی تمام

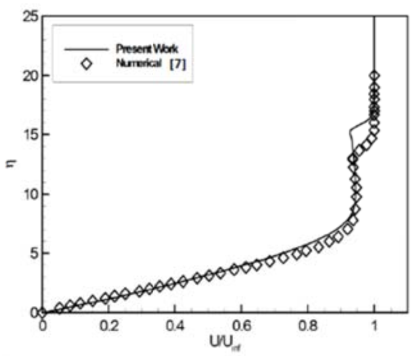
متغیرهای جریان برون‌یابی می‌شوند. شرط عدم لغزش نیز بر روی صفحه برای مؤلفه‌های سرعت وجود دارد. مقدار چگالی و فشار روی صفحه از مقادیر آنها در نقطهٔ بالایی جایگزین می‌شود. در حل عددی از حداقل گام زمانی با عدد کورانت ۰/۵ برای پیشروی در زمان استفاده می‌شود. در ادامه نتایج حل عددی در شرایط پایا ارائه خواهد شد.

اثر افزایش نقاط شبکه. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، طرح KEP به‌دلیل حذف جملات اتلاف مصنوعی از معادلات، برای حل عددی مستقیم مناسب است. در چنین حل‌هایی با ریز کردن شبکه (به‌شرطی‌که تعداد گره آن از مرتبهٔ عدد رینولدز جریان باشد)، نتایج دقیق‌تری به‌دست می‌آید. بنابراین انتظار می‌رود دقت نتایج طرح KEP با افزایش نقاط شبکه بیشتر شود.

در شکل (۳) توزیع خطوط فشار ثابت به‌دست آمده از طرح مذکور در دو شبکهٔ درشت و ریز به‌ترتیب با تعداد نقاط (۵۰×۶۰) و (۱۸۰×۲۰۰) با هم مقایسه شده‌اند. توزیع فشار در شبکهٔ درشت با حذف جملات اتلاف مصنوعی، به حلی نوسانی همگرا شده است (شکل ۳-الف). این برتری طرح KEP را می‌رساند؛ چرا که طرح‌های مرسوم عددی (مانند روش مک-کورمک به‌کار رفته در مرجع [7]) بدون اتلاف مصنوعی تحت هر شرایطی واگرا می‌شوند. با افزایش نقاط شبکه، نوسانات فشار به‌دست آمده تقریباً از بین می‌رود و توزیع مناسبی به‌دست می‌آید (شکل ۳-ب).



شکل ۳ توزیع خطوط فشار ثابت روی صفحهٔ تخت (Re_∞ =۱۰۰۰ ، Ma_∞ =٤)؛
(الف) شبکهٔ (۵۰×٦۰)، (ب) شبکهٔ (۱۸۰×۲۰۰)



شکل ٤ پروفیل بی‌بعد سرعت جریان در انتهای صفحه تخت برحسب متغیر η (Re_∞ =۱۰۰۰ ، Ma_∞ =٤)

پروفیل سرعت. شکل (٤) پروفیل سرعت بی‌بعد جریان مافوق صوت آرام را در انتهای صفحهٔ تخت برحسب متغیر بی‌بعد η (تعریف شده به‌صورت زیر) نشان می‌دهد.

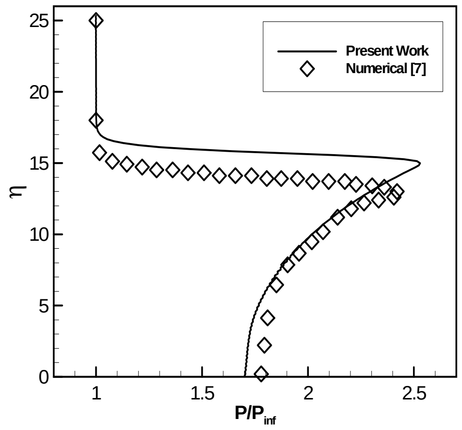
$$\eta = \frac{y}{x}\sqrt{Re_x} \tag{۲٤}$$

که در آن:

$$Re_x = \frac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu_\infty}$$

در این حالت به‌دلیل پایین بودن عدد رینولدز، جریان آرام است و پروفیل سرعت شیب ملایمی دارد. با رسیدن به لبهٔ لایهٔ ضربه‌ای (تقریباً در محل ۱۵= η)، به‌دلیل اختلاف فشار طرفین این لایه، در پروفیل سرعت افزایش ناگهانی (شکستگی) به‌وجود می‌آید. لایهٔ ضربه‌ای، ناحیه‌ای بین سطح و موج ضربه‌ای است که به‌دلیل بالا بودن عدد ماخ و صفر شدن سرعت جریان در ابتدای صفحه، تشکیل می‌شود. در شکل (٤) پروفیل سرعت به‌دست آمده از طرح KEP با حل عددی مرجع [7] مقایسه شده است. مطابقت خیلی خوب نتایج کاملاً مشهود می‌باشد. مشاهده می‌شود که هیچ نوسانی (ناشی از حذف جملات اتلاف مصنوعی) در پروفیل سرعت وجود ندارد.

پروفیل فشار. شکل (۵) تغییرات فشار بی‌بعد جریان مافوق صوت آرام را برحسب متغیر بی‌بعد η در انتهای صفحهٔ تخت نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که فشار جریان به‌دلیل تشکیل لایهٔ ضربه‌ای از روی سطح تا تقریباً ۲/۵ برابر فشار جریان آزاد در لبهٔ این لایه (۱۵= η) افزایش و به سرعت با خروج از آن تا فشار جریان آزاد کاهش می‌یابد. در شکل (۵) پروفیل به‌دست آمده از طرح KEP بدون اتلاف مصنوعی با حل عددی مرجع [7] مقایسه شده است؛ حل حاضر با دقت قابل قبولی، فارغ از هر گونه نوسان، همخوانی مناسبی با نتایج عددی مرجع مذکور ارائه می‌دهد.



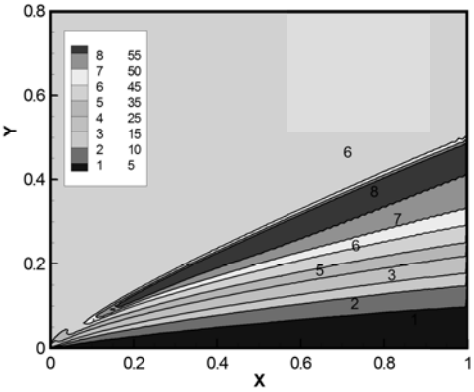
شکل ۵ پروفیل بی‌بعد فشار جریان در انتهای صفحه تخت برحسب متغیر η (Ma_∞ =٤ ، Re_∞ =۱۰۰۰)

وابستگی طرح به شبکه و عدد رینولدز. طرح KEP زمانی می‌تواند بدون اتلاف ناپیوستگی‌ها را حل کند که تعداد نقاط شبکه، از مرتبهٔ عدد رینولدز جریان باشد؛ به‌طوری که هم‌زمان با افزایش عدد رینولدز، نقاط شبکه هم متناسب با توانی از آن افزایش یابد [2]. در این زمینه از تعریف عدد رینولدز سلولی (Re_c) نیز می‌توان کمک گرفت:

$$Re_c = \frac{\rho_o V_o \sqrt[3]{Vol_o}}{\mu_o} \tag{۲۵}$$

لذا تعداد نقاط شبکه برای داشتن یک حل عددی پایدار و غیرنوسانی با طرح KEP باید به اندازه‌ای باشد که عدد رینولدز سلولی از مرتبهٔ واحد شود [4]. در رابطهٔ (۲۵) V_o سرعت کلی جریان در سلول o است. در جریان مافوق صوت آرام با شرایطی که در جدول (۲) آمده است، نتایج تقریباً خوبی با طرح KEP بدون اتلاف حاصل شد. در این حالت (Re_∞ =۱۰۰۰)، شبکه ۱۲۰۰۰ نقطه دارد که تقریباً از مرتبهٔ $Re^{\frac{7}{5}}$ می‌باشد.

شکل (٦) توزیع عدد رینولدز سلولی را در حالت مذکور نشان می‌دهد. در این شکل عدد رینولدز سلولی بین مقادیر ۵ تا ۵۵ (تقریباً از مرتبهٔ واحد) متغیر است. مشاهده شد که در این حالت طرح KEP حلی تقریباً پایدار ارائه داده است. در شرایط یکسان و تنها با افزایش عدد رینولدز تا ۵۰۰۰، حل KEP (بدون جملات اتلاف مصنوعی) حتی با شبکهٔ ۱۸۰×۲۰۰ واگرا می‌شود. این درحالی است که با افزایش نقاط شبکه تا ۳۰۰×۴۰۰ (تقریباً از مرتبهٔ $Re^{\frac{8}{5}}$)، طرح KEP با دقت خوبی همگرا می‌شود. در این حالت (Re_∞ =۵۰۰۰)، توزیع Re_c همانند شکل (٦) است و بین مقادیر ۱۰ تا ۱۴۰ متغیر می‌باشد. لذا وابستگی طرح KEP به عدد رینولدز و شبکهٔ مورد استفاده برای رسیدن به حلی پایدار مورد تأیید قرار می‌گیرد.



شکل ٦ توزیع عدد رینولدز سلولی (Ma_∞ =٤ ، Re_∞ =۱۰۰۰) در شبکهٔ (۱۰۰×۱۲۰)

جدول ۳ مشخصات جریان آزاد روی ایرفویل

$Re_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty c}{\mu_\infty}$	$Ma_\infty = \frac{U_\infty}{c_\infty}$	a (deg)	T_∞ (K)
۵۰۰	۰/۸۵	۰/۰	۲۸۸/۱۶

آزمون دوم: ایرفویل. به‌منظور بررسی قابلیت و توانایی طرح KEP در شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان‌های تراکم‌پذیر، از این طرح برای بررسی جریان روی ایرفویل NACA۰۰۱۲ که هندسهٔ پیچیده‌تری از صفحهٔ تخت دارد، استفاده می‌گردد؛ شرایط جریان در جدول (۳) آمده است. به‌منظور کاهش محاسبات حل عددی، عدد رینولدز جریان پایین فرض می‌شود. نتایج طرح KEP در این حالت با نتایج میتال (Mittal) [8] (حل عددی معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر براساس روش‌های المان محدود پایدار) مقایسه می‌شود.

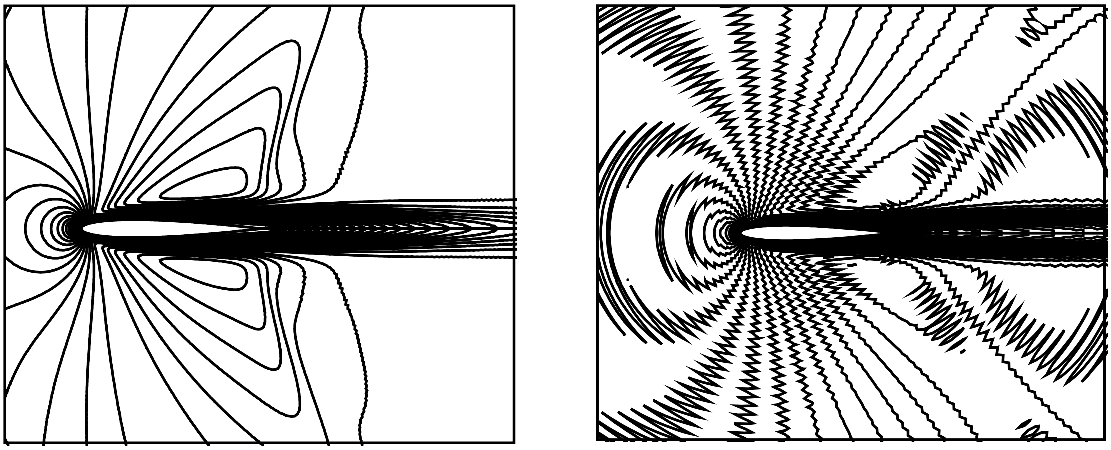
لازم به ذکر است که در این‌جا معادلات جریان براساس شرایط جریان آزاد و طول وتر ایرفویل، بی‌بعد می‌شوند. میدان جریان روی ایرفویل با یک شبکهٔ غیریکنواخت منطبق بر هندسه، پوشیده شده است. این شبکه از نوع O-mesh است که از طریق حل معادلات پواسون (Poisson) روی هندسهٔ ایرفویل به‌دست می‌آید. مرز بالایی اطراف ایرفویل به‌صورت دایره‌ای در نظر گرفته می‌شود. این مرز باید به اندازهٔ کافی از سطح ایرفویل دور باشد تا امواج ضربه‌ای کاملاً درون شبکه قرار بگیرند و شرایط مرزی به‌درستی اعمال شود. شرایط جریان در مرز ورودی دامنهٔ محاسباتی همان شرایط جریان آزاد و در خروج از آن، کل متغیرهای جریان برون‌یابی می‌شوند. شرط عدم لغزش روی سطح ایرفویل برای مؤلفه‌های سرعت جریان برقرار است. مقدار فشار و چگالی روی سطح ایرفویل از گره‌های بالای سطح برون‌یابی می‌شود.

اثر افزایش نقاط شبکه. شکل (۷) توزیع عدد ماخ حول ایرفویل، حاصل از طرح KEP بدون اضافه کردن اتلاف مصنوعی را نشان می‌دهد. نتایج به‌ازای دو شبکهٔ خیلی ریز (۳۰۰×۵۰۰) و شبکهٔ متوسط (۱۲۰×۲۵۰) با هم مقایسه شده است. در شکل (۷-الف) مشاهده می‌شود که توزیع عدد ماخ حول ایرفویل ناشی از حذف جملات اتلاف مصنوعی، با شبکهٔ متوسط به حلی هر چند نوسانی همگرا شده است که نشان از برتری طرح KEP نسبت به طرح‌های دیگر در عدم واگرایی دارد. با افزایش نقاط شبکه در شکل (۷-ب)، نوسانات حل به‌دلیل غلبهٔ اتلافات ذاتی مورد تأیید [1]،

کاملاً از بین می روند و توزیع بسیار بهتری بـه‌دسـت می‌آید.

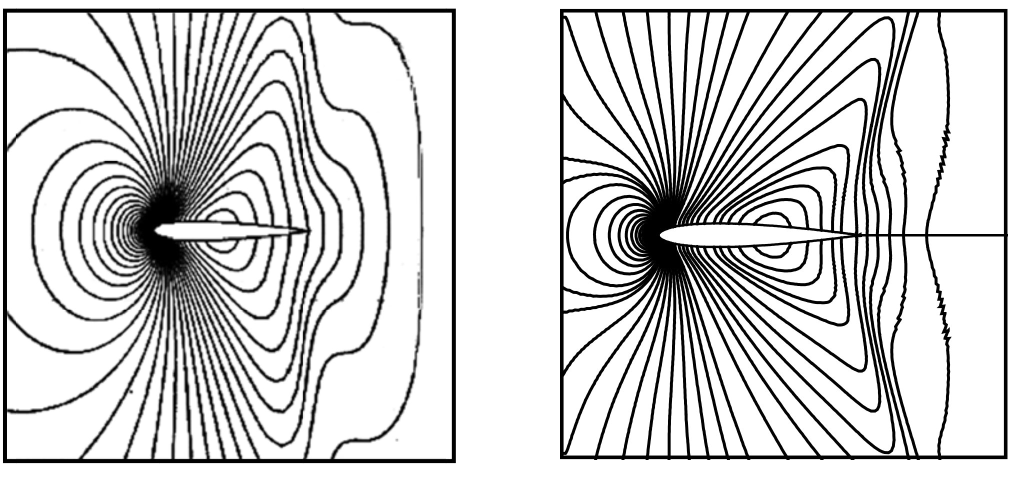
مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از شـکل‌هـای (۳ و ۷) نشان می‌دهد که عملکرد طرح KEP در شبکه‌های ریز برای ارائه حلی پایدار و غیرنوسانی، بهتر می‌شود.

با توجه به نتایج بـه‌دست آمده نتیجه مـی‌شـود کـه برای به‌دست آوردن حلی پایدار و غیرنوسانی از طـرح KEP باید شبکهٔ (۳۰۰×۵۰۰) مورد استفاده قرار گیـرد. لذا در ادامه، نتایج ارئه شده براساس این شبکه خواهـد بود.



(ب)

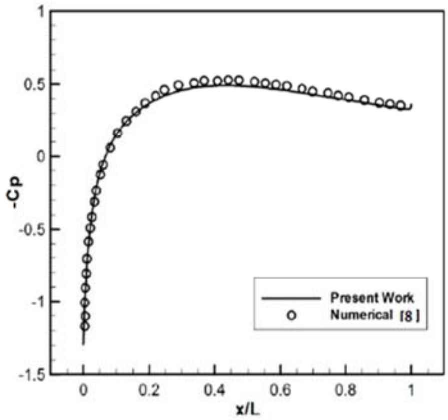
شکل ۷ توزیع عدد ماخ حول ایرفویل NACA ۰۰۱۲ (Re_∞ =۵۰۰ ، Ma_∞ =۰/۸۵)؛
الف: شبکهٔ (۱۲۰×۲۵۰)، ب: شبکهٔ (۳۰۰×۵۰۰)



(الف)   (ب)

شکل ۸ توزیع خطوط فشار ثابت حول ایرفویل NACA ۰۰۱۲ (Re_∞ =۵۰۰ ، Ma_∞ =۰/۸۵)؛
الف: کار حاضر با شبکهٔ (۳۰۰×۵۰۰)، ب: حل مرجع [8]

توزیع خطوط فشار ثابت. در شکل (۸) توزیع خطوط فشار ثابت حاصل از طرح KEP در شرایط جریان مشابه با حل مرجع [8] مقایسه شده است. توزیع خطوط فشار در بالا و پایین ایرفویل کاملاً متقارن است؛ چرا که زاویهٔ حملهٔ جریان صفر می‌باشد. چنانچه مشاهده می‌شود توزیع فشار در طرح KEP با وجود حذف جملات اتلافی، کاملاً غیرنوسانی است و در حالت کلی موافقت خوبی با حل مرجع [8] دارد.

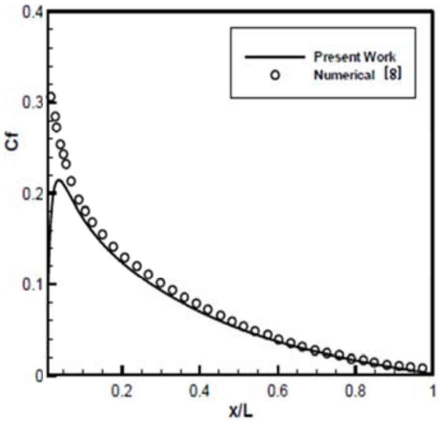


شکل ۹ تغییرات ضریب فشار روی سطح ایرفویل NACA ۰۰۱۲ ؛ (Re_∞ =۵۰۰ ، Ma_∞ =۰/۸۵)

تغییرات ضرایب فشار و اصطکاک سطحی. شکل (۹) تغییرات ضریب فشار روی سطوح بالایی و پایینی ایرفویل را نشان می‌دهد.

در جریان‌های تراکم‌پذیر وجود اتلاف مصنوعی حتی در نواحی هموار (بدون امواج ضربه‌ای) ضروری است؛ اما با توجه به شکل (۹) طرح KEP توانسته است با موافقت خیلی خوبی نسبت به حل مرجع [8]، حلی کاملاً غیرنوسانی (بدون وجود اتلاف مصنوعی) ارائه دهد.

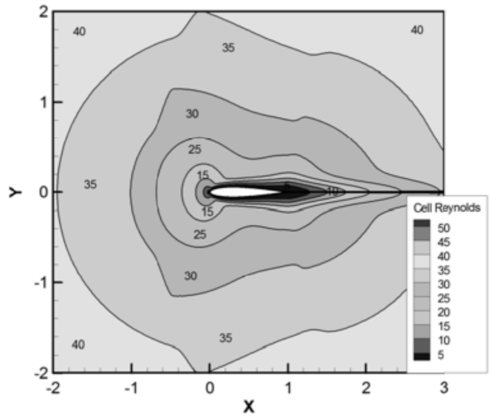
شکل (۱۰) تغییرات ضریب اصطکاک روی سطوح بالایی و پایینی ایرفویل را نشان می‌دهد. ضریب اصطکاک به‌جز افزایشی جزیی، به‌دلیل کم بودن ضخامت لایهٔ مرزی در ابتدای ایرفویل، تا انتهای آن کاهش می‌یابد. در حالت کلی نتیجهٔ حل عددی حاضر برای این مورد نیز دقت خوبی در مقایسه با حل مرجع [8] دارد.



شکل ۱۰ تغییرات ضریب اصطکاک روی سطح ایرفویل NACA ۰۰۱۲؛ (Re_∞ =۵۰۰ ، Ma_∞ =۰/۸۵)

توزیع عدد رینولدز سلولی. در تحلیل جریان روی ایرفویل با طرح KEP از شبکهٔ (۳۰۰×۵۰۰) سلولی بدون اضافه کردن جملات اتلاف مصنوعی استفاده شد. تعداد نقاط این شبکه تقریباً از مرتبهٔ $Re^{\frac{19}{10}}$ است که نسبت به جریان روی صفحهٔ تخت مرتبهٔ بزرگ‌تری دارد. این امری طبیعی است؛ چرا که هندسهٔ ایرفویل پیچیده‌تر است و برای پایداری حل به شبکهٔ ریزتری نیاز دارد.

شکل (۱۱) توزیع عدد رینولدز سلولی را حول ایرفویل NACA ۰۰۱۲ نشان می‌دهد. بازهٔ تغییرات Re_c در کل دامنهٔ محاسباتی تقریباً بین ۵ تا ۵۰ است. این بازه مشابه با بازهٔ تغییرات Re_c در جریان روی صفحهٔ تخت می‌باشد. بنابراین به‌نظر می‌رسد که طرح KEP برای ارائه دادن حلی پایدار و غیرنوسانی (بدون اضافه‌کردن هیچ‌گونه اتلاف مصنوعی به معادلات)، نیازمند شبکه‌ای است که در آن Re_c تقریباً از مرتبهٔ واحد باشد. لذا باز هم وابستگی طرح KEP به شبکهٔ مورد استفاده براساس عدد رینولدز تأیید می‌گردد.



شکل ۱۱ توزیع عدد رینولدز سلولی حول ایرفویل NACA ۰۰۱۲ با شبکهٔ (۵۰۰×۳۰۰)؛ (Ma_∞ =۰/۸۵ ، Re_∞ =۵۰۰)

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در کار حاضر، معادلات جریان تراکم‌پذیر لزج براساس طرح حفظ مقدار انرژی جنبشی (KEP) منفصل شد؛ سپس از این طرح برای تحلیل عددی جریان مافوق صوت و گذر از صوت روی صفحهٔ تخت و ایرفویل استفاده گردید. نتایج به‌دست آمده از پژوهش حاضر به شرح زیر است:

- اولین آزمون برای جریان مافوق صوت آرام روی صفحهٔ تخت در عدد رینولدز ۱۰۰۰ نشان داد که این طرح بدون اضافه نمودن جملات اتلاف مصنوعی حتی در محل وقوع امواج ضربه‌ای، به‌خوبی می‌تواند وقوع موج ضربه‌ای در ابتدای صفحه و تشکیل لایهٔ ضربه را پیش‌بینی کند.
- در آزمون دوم برای جریان گذر از صوت روی ایرفویل NACA ۰۰۱۲ در عدد رینولدز ۵۰۰، توزیع خطوط فشار ثابت و ضریب اصطکاک سطحی با وجود حذف جملات اتلاف مصنوعی، کاملاً غیرنوسانی بود و در حالت کلی موافقت خوبی با نتایج عددی موجود مشاهده شد.
- هر دو آزمون به‌وضوح نشان دادند که افزایش نقاط شبکه به بهبود پایداری، افزایش دقت حل و کاهش نوسانات کمک قابل توجهی می‌کند.
- در هر یک از آزمون‌های تعریف شده برای طرح KEP ثابت شد که اندازهٔ شبکه به عدد رینولدز جریان و عدد رینولدز سلولی وابسته است. به عبارت دیگر، طرح KEP برای ارائه دادن حلی پایدار و غیرنوسانی (بدون اضافه‌کردن هیچ‌گونه اتلاف مصنوعی به معادلات)، نیازمند شبکه‌هایی است که در آن عدد رینولدز سلولی تقریباً از مرتبهٔ واحد باشد. از طرفی برای رسیدن به نتایج مطلوب با طرح مذکور باید تعداد نقاط شبکه متناسب با توانی از عدد رینولدز جریان باشد.

با توجه به نتایج حاصل از آزمون‌ها می‌توان گفت که روش KEP قادر است بدون هیچ اتلاف مصنوعی حتی در نواحی با امواج ضربه‌ای، حلی پایدار و غیرنوسانی برای جریان تراکم‌پذیر ارائه دهد. لذا این روش می‌تواند بدون نگرانی از حذف برخی ویژگی‌های جریان آشفته (به‌واسطهٔ وجود اتلاف مصنوعی) برای شبیه‌سازی عددی مستقیم آن (بدون نیاز به هیچ‌گونه مدل‌سازی پدیدهٔ آشفتگی) به‌کار رود.

فهرست علائم

a	زاویهٔ حمله، (deg)
A	مساحت، (m^2)
c	سرعت صوت، (m/s)
C_f	ضریب اصطکاک سطحی، (بی‌بعد)
c_p	گرمای ویژه در فشار ثابت، (J/kg.K)
C_P	ضریب فشار سطحی، (بی‌بعد)
D	کل میدان جریان سیال
CFL	عدد کورانت، (بی‌بعد)
E	انرژی کل مخصوص، (J/kg)
e	انرژی درونی، (J/kg)
F	بردار شار معادلات جریان
H	انتالپی مخصوص، (J/kg)
k	هدایت حرارتی، (W/m.K)

K	انرژی جنبشی بر واحد حجم، (J/m^3)
L	طول مشخصه، (m)
Ma	عدد ماخ، (بی‌بعد)
p	فشار، (Pa)
Pr	عدد پرانتل، (بی‌بعد)
q_j	شار هدایت حرارتی در جهت دلخواه j، (W/m^2)
Re	عدد رینولدز، (بی‌بعد)
Re_c	عدد رینولدز سلولی، (بی‌بعد)
S	بردار مساحت هر وجه از سلول شبکه
t	زمان، (s)
T	درجه حرارت، (K)
u_i	مؤلفهٔ سرعت جریان در جهت دلخواه i، (m/s)
U_∞	سرعت جریان آزاد، (m/s)
u, v	مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در دستگاه مختصات کارتزین
V	سرعت کلی جریان محلی، (m/s)
Vol	حجم یک سلول از شبکه، (m^3)
W	بردار متغیرهای جریان
x_j	مؤلفهٔ مکان در جهت دلخواه j
x, y	جهات افقی و عمودی در دستگاه مختصات کارتزین

علائم یونانی

α^n	ضریب هر مرحله در روش رانگ-کوتا، $n = 1,2, \dots$
γ	نسبت گرماهای ویژهٔ حرارتی، (بی‌بعد)
δ_{ij}	تابع دلتای کرونکر
η	متغیر تشابهی در لایه‌مرزی، (بی‌بعد)
λ	شعاع ضمنی ماتریس ژاکوبین شار، (بی‌بعد)
μ	لزجت طبیعی سیال، (kg/m.s)
ρ	چگالی، (kg/m^3)
τ_{ij}	تانسور تنش‌های لزج، (Pa)

زیرنویس‌ها

∞	شرایط جریان آزاد
b	محل گره مرزی در شبکه
o	محل گره در شبکهٔ سه‌بعدی
op	محل وجه، بعد گره o در شبکهٔ سه‌بعدی
p	محل گره‌های مجاور o
po	محل وجه، قبل گره o در شبکهٔ سه‌بعدی
x, y	جهات افقی و عمودی در دستگاه مختصات کارتزین

بالانویس‌ها

-	میانگین حسابی یک متغیر جریان بین دو گره
*	متغیر بی‌بعد شده
i, j	جهات دستگاه مختصات کارتزین

مراجع

1. Chandrashekar, P., "Kinetic energy preserving and entropy stable finite volume schemes for compressible Euler and Navier-Stokes equations", TIFR Center for Applicable Mathematics, Bangalore, India, (2012).
2. Jameson, A., "Formulation of kinetic energy preserving conservative schemes for gas dynamics and direct numerical simulation of one-dimensional viscous compressible flow in a shock tube using

entropy and kinetic energy preserving schemes", Aerospace Computing Laboratory, Report ACL 2007–2, Stanford University, (2007).
3. Allaneau, Y., Jameson, A., "Direct numerical simulations of a two dimensional viscous flow in a shock tube using a kinetic energy preserving schemes", 19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA 2009-3797, San Antonio, Texas, June 22-25, (2009).
4. Allaneau, Y., Jameson, A., "Direct numerical simulations of plunging airfoils", 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA 2010-728, Orlando, Florida, January 4-7, (2010).
5. Allaneau, Y., Jameson, A., "Kinetic energy conserving discontinuous galerkin scheme", 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA 2011-198, Orlando, Florida, January 4-7 , (2011).
6. Swanson, R.C., Turkel, E., "On central difference and upwind scheme", J. Comp. Phys., 101, pp. 297- 306, (1992).
7. Anderson, J.D., "Computational Fluid Dynamics the Basics with Applications", McGraw-Hill, New York, (1995).
8. Mittal, S., "Finite element computation of unsteady viscous compressible flows", Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No. 157, pp. 157-175, (1998).